$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x} \in U$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar v}(\bar x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar x + h\bar v) - f(\bar x)}{h} \quad \text{όπου } \bar\Phi(h) = \bar x + h\bar v$$

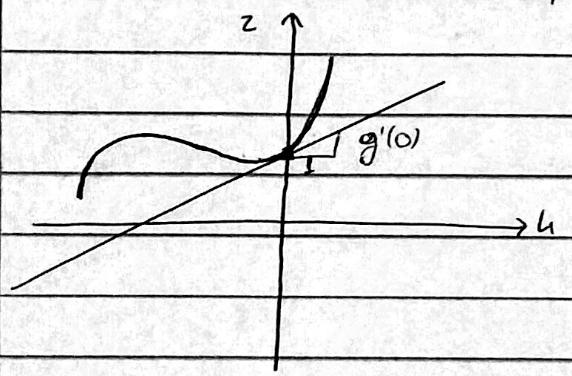
$$\left(= \lim_{h\to0}\frac{(f\circ\Phi)(h) - (f\circ\Phi)(0)}{h} = g'(0) \quad \text{όπου } g = f\circ\Phi\right)$$

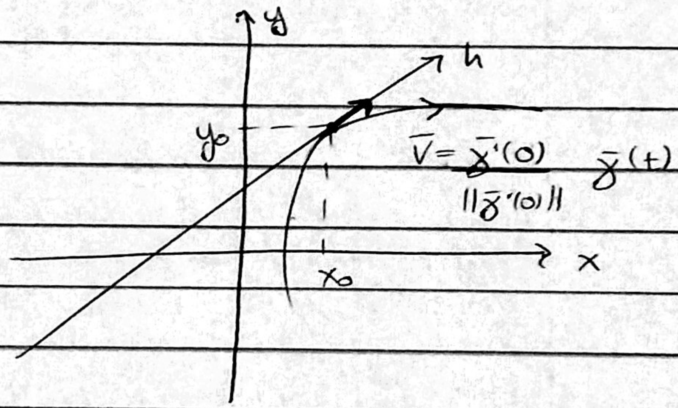
(Δηλ. η παράγωγος κατά κατευθ. $\bar v\in\mathbb{R}^n$ μιας $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$ είναι η παράγωγος (μιας μεταβλ.) της f περιορισμένης στην ευθεία $\bar x + h\bar v$, $h\in\mathbb{R}$)

Υπενθύμιση: $\frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar x)$

→ Αν f διαφορίσιμη στο $\bar x$, τότε $\frac{\partial f}{\partial \bar v}(\bar x) = g'(0) = (f\circ\Phi)'(0)$

$\underset{\text{κανόνας αλυσίδας}}{=}$ $\nabla f(\bar\Phi(0))\cdot\bar\Phi'(0)$, όπου $\bar\Phi(0)=\bar x$ και $\bar\Phi'(0)=\bar v$



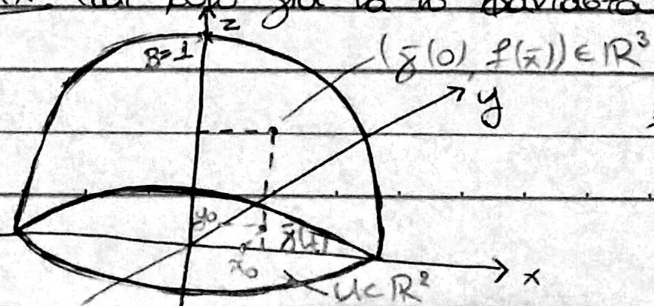


→ Αν $\bar\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n$ με $\bar\gamma(0)=\bar x$, $\varepsilon>0$, μια κανονική καμπύλη με $\bar\gamma(0)=\bar v$ τότε η καμπύλη $(\underbrace{\bar\gamma(t)}_{\in\mathbb{R}^n}, \underbrace{f(\bar\gamma(t))}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^{n+1}$, $t\in(\varepsilon,\varepsilon)$

βρίσκεται στο $\Gamma f = \{(\bar x, f(\bar x)), \bar x\in U\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$

και έχει εφαπτόμενο διάνυσμα $(\bar\gamma'(0), \nabla f(\bar x)\cdot\bar\gamma'(0))\in\mathbb{R}^{n+1}$

πχ. (και μόνο για να το φανταστούμε) $\boxed{n=2}$



$f(x,y) = a(x^2+y^2)+\beta$ όπου $\beta=1$ και $a<0$

$= 1-|a|(x^2+y^2)$

No. Date

$\boxed{n=2}$:

Οι ευθείες $(x,y,z) = (\bar{x}, f(\bar{x})) + \lambda(\bar{\gamma}'(0), \nabla f(\bar{x})\bar{\gamma}'(0))$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ①
είναι οι εφαπτόμενες ευθείες από γράφημα Γ_f στο σημείο του
$(\bar{x}, f(\bar{x}))$ για τις καμπύλες $(\bar{\gamma}(t), f(\bar{\gamma}(t)))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, στο
σημείο αυτό και βρίσκονται στο εφαπτόμενο επίπεδο της $f: U \to \mathbb{R}$
$U \subset \mathbb{R}^2$ στο σημείο $\bar{x} \in U$.
(ή το εφαπτόμενο επίπεδο ~~του~~ του γραφήματος $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$ στο
σημείο του $(\bar{x}, f(\bar{x}))$)

με τύπο $\boxed{z = f(\underbrace{x_0,y_0}_{=\bar{x}}) + \underbrace{(x-x_0, y-y_0)\cdot \nabla f(x_0,y_0)}, \quad x,y \in \mathbb{R}}$ ②

$$\| $$
$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Το εφαπτ. επίπεδο γράφεται και ως

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \left[\underbrace{(x-x_0)}_{=\tilde{\lambda}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \underbrace{(y-y_0)}_{=\tilde{\mu}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \right]$$

Η ευθεία ① βρίσκεται στο εφαπτ. επίπεδο ② αφού έχουμε

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \bar{\gamma}'(0)$$

και

$$z = f(x_0,y_0) + \lambda \bar{\gamma}'(0)\cdot \nabla f(x_0,y_0)$$

Αυτή ήταν η **πρώτη παρατήρηση** σχετικά με (γεωμετρικές) ιδιότητες της παραγώγου μιας $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Δεύτερη παρατήρηση:

Η κλίση $\nabla f(\bar{x})$ μιας διαφ. στο $\bar{x}$ $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό
(παράγωγος $Df(\bar{x})$)

είναι κάθετη στο σύνολο στάθμης $c = f(\bar{x})$ της f.

Δηλαδή, $\forall\ \bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n \}$ (ομαλός), $\varepsilon > 0$, με $\bar{\gamma}((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset L_f(f(\bar{x}))$

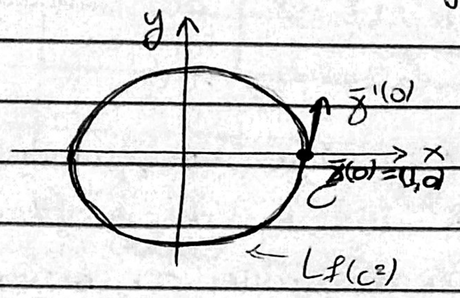
ισχύει $\bar{\gamma}'(0) \cdot \nabla f(\bar{x}) = 0$

και $\bar{\gamma}(0) = \bar{x}$

Παράδειγμα:

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$\varepsilon^2 > 0 : L_f(c^2) = \{ (x,y) \in U \to \mathbb{R}^2 : \underbrace{f(x,y)}_{= x^2 + y^2} = c^2 \}$



Δηλ. η 2η παρατήρηση λέει για το παράδειγμα ότι αν $(x_0, y_0) \in L_f(c^2)$ και $\bar{\gamma}(t) \subset L_f(c^2)$ με $\bar{\gamma}(0) = (x_0, y_0)$

τότε $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \bar{\gamma}'(0) = 0$

Έστω $(x_0, y_0) \in L_f(c^2)$ δηλ. $x_0^2 + y_0^2 = c^2$

και $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\bar{\gamma}(t) = \underbrace{(x_0, y_0)}_{= (0,0)} + (\cos t, \sin t)$

$\bar{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t) \Rightarrow \bar{\gamma}'(0) = (0, 1)$

και $f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \nabla f(x,y) = 2(x,y)$

$\Rightarrow \nabla f(1,0) = 2(1,0)$

και, πράγματι, $\bar{\gamma}'(0) \cdot \nabla f(1,0) = (0,1) \cdot 2(1,0) = 0$

↑ Εδώ $(x_0, y_0) = (0,0)$ και $c = 1$.

Γενική περίπτωση:

$\bar{\gamma}(t) = c(\cos(t + t_0), \sin(t + t_0))$ με $\bar{\gamma}(0) = (\cos t_0, \sin t_0)$

$\Rightarrow \bar{\gamma}'(t) = c(-\sin(t + t_0), \cos(t + t_0))$

$\Rightarrow \bar{\gamma}'(0) = c(\underbrace{-\sin t_0}_{-y_0}, \underbrace{\cos t_0}_{x_0})$

No. Date

$\Longrightarrow \bar{\gamma}'(0) \perp (x_0, y_0) = \frac{1}{2}\nabla f(x_0, y_0)$

<u>απόδειξη</u> $\qquad = \tilde{c}$

Έχουμε $\bar{\gamma}(t) \subset L_f(f(\bar{x}))$

$\Longrightarrow f(\bar{\gamma}(t)) = \tilde{c} \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

όπου $f \circ \bar{\gamma}(t) = g(t) \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow g'(t) = 0 \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\Longrightarrow \underbrace{g'(0)}_{\nabla f(\bar{\gamma}(0)) \cdot \bar{\gamma}'(0)} = 0$

<u>Ερώτηση:</u>

Ο "μικρός μαθηματικός": Μπορώ άραγε να γράψω το γράφημα Γf μιας $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ ως σύνολο στάθμης; Τότε, αφού η κλίση της g που θα περιγράφει το σύνολο στάθμης είναι κάθετη σε αυτό, μήπως η ∇g θα είναι κάθετη στο εφαπτ. επίπεδο της f;

<u>απάντηση</u>

Ναι!

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω $\underbrace{f(x,y)}_{=z} = x^2 + y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Δηλ. $\Gamma f = \{ (x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \{ (x,y,z) : z = f(x,y) = x^2 + y^2, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\iff \underbrace{z - f(x,y)}_{g(x,y,z)} = z - (x^2+y^2) = 0 \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0 \}$

$= L_g(0)$

Τότε γνωρίζουμε ότι $\nabla g(x,y,z) = (-\nabla f(x,y), 1)$

Από Δευτ. Παρατήρηση $\nabla g(x,y,z) \perp \Gamma f$ στο σημείο $(x, y, f(x,y))$

Από την άλλη το εφαπτ. επίπεδο στο Γf στο σημείο (x_0, y_0, z_0) είναι
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + (x-x_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (y-y_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Και πράγματι,
$$\nabla g(x_0,y_0,z_0) \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

αφού $\nabla g(x_0,y_0,z_0)\cdot\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) =$
$$= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right)\cdot\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) = 0$$

Τρίτη Παρατήρηση:

$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{x} \in U$, f διαφ. στο $\bar{x}$ και $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ $\|\bar{v}\| = 1$. Τότε $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \underbrace{\nabla f(\bar{x})}_{Df(\bar{x})} \cdot \bar{v}$

$$\Longrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x})\right| \leq \|\nabla f(\bar{x})\|$$

$$\Longleftrightarrow -\|\nabla f(\bar{x})\| \leq \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) \leq \|Df(\bar{x})\| \quad \forall \bar{v}$$

και αν $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$

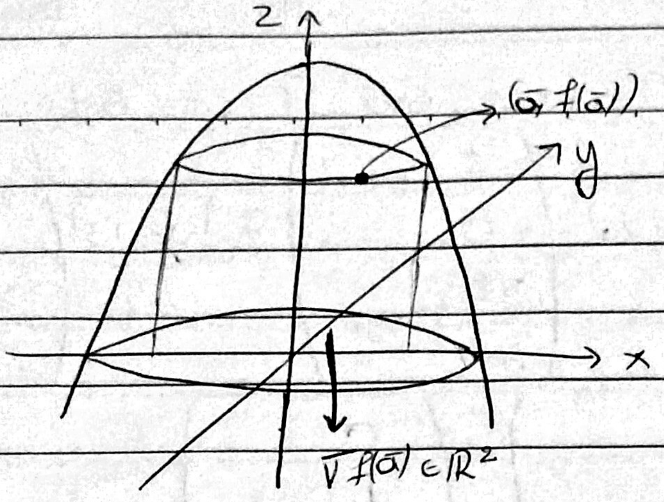
έχουμε για $\bar{v} = \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}$: $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \|\nabla f(\bar{x})\|$

$\Longrightarrow$ Για $\bar{v} = \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}$, αν $\|\nabla f(\bar{x})\| \neq 0$

η f έχει τον μέγιστο θετικό αριθμό μεταβολής

δηλ, στην κατεύθυνση της κλίσης της f, η f αυξάνει «πιο γρήγορα» από ότι σε όλες τις άλλες κατευθύνσεις.

No. Date



$$f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$$
$$\nabla f(x,y) = -2(x,y)$$